Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Regulares

Prof. Anderson Belgamo

Linguagens Regulares

- Linguagens Regulares ou Tipo 3
  - formalismos operacionais ou reconhecedores
    - *Autômato Finito Determinístico*
    - *Autômato Finito Não-Determinístico*
    - *Autômato Finito com Movimentos Vazio*
  - formalismo axiomático ou gerador
    - *Gramática Regular*
  - formalismo denotacional
    - *Expressão Regular*

Sistema de Estados Finitos

- Modelo matemático de sistema:
  - assume um número finito e pré-definido de estados
  - o estado resume informações passadas necessárias para determinar as ações para a próxima entrada
- Exemplo: elevador
  - Entrada: requisições pendentes
  - Estado: andar corrente e direção do movimento
  - Não memoriza as requisições anteriores

Autômato Finito Determinístico

- É uma máquina composta por fita, unidade de controle e programa.
  - Fita: dispositivo de entrada que contém a informação a ser processada
  - Unidade de Controle: reflete o estado corrente da máquina
    - Possui uma unidade de leitura (cabeça da fita)
    - Acessa uma célula da fita de cada vez
    - Movimenta-se exclusivamente para a direita
  - Programa
    - Comanda as leituras
    - Define o estado da máquina

Autômato Finito Determinístico

- Fita
  - finita (à esquerda e à direita)
  - dividida em células
  - cada célula armazena um símbolo
  - Símbolos pertencem a um alfabeto de entrada
  - *não é possível gravar sobre a fita*
  - palavra de entrada (a ser processada) ocupa toda a fita
- Estados
  - número de estados finito e predefinido

Autômato Finito Determinístico

- Unidade de Controle
  - Estados
  - Unidade de leitura
- Unidade de leitura
  - Inicialmente a cabeça de leitura posicionada na célula mais à esquerda da fita
  - Lê o símbolo de uma célula de cada vez
  - Após a leitura, move a cabeça uma célula para direita
- Programa
  - Dependendo do estado corrente e do símbolo lido, determina o novo estado.

Autômato Finito Determinístico

- Definição Formal: é uma 5-upla $M = (\sum, Q, \delta, q_0, F)$
  - $\sum$: alfabeto, símbolos de entrada
  - Q : conjunto finito de estados possíveis
  - δ : função programa $\delta : Q \times \sum \rightarrow Q$
  - q_0 : estado inicial
  - F: conjunto finito de estados finais

Autômato Finito Determinístico

- Linguagem aceita por uma AFD é chamada de linguagem regular ou do Tipo 3, segundo a hieraquia de Chomsky.
- Um AFD sempre pára:
  - Aceitando apalavra ou;
  - Rejeitando a palavra
- Pára no fim da fita após processar o último símbolo da fita:
  - Aceita: atinge um estado final
  - Rejeita: atinge um estado não-final

Autômato Finito Determinístico

- Pára por indefinição:
  - A função programa é indefinida para o argumento (estado corrente e símbolo lido): pára e rejeita, não importando qual o estado corrente.
- Exemplo:
  - L_1: {w | w possui aa ou bb como subpalavra}
  - M_1: $(\{a,b\}, \{q_o, q_1, q_{2,} q_f\}, \delta_1, q_0, \{q_f\})$

δ_1	**a**	**b**
q_o	q_1	q_2
q_1	q_f	q_2
q_2	q_1	q_f
q_f	q_f	q_f

Autômato Finito Determinístico

– Exemplo:

- L_4: {w | w possui um número par de a e b}
- M_4: ({a,b}, {q_o, q_1, q_2, q_3}, δ_4, q_0, {q_0})

δ_4	**a**	**b**
q_o	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Autômato Finito Não-Determinístico

– Idéia básica: o processamento de uma entrada resulta em um conjunto de novos estados

– IMPORTANTE: o não-determinismo não aumenta o poder computacional, ou seja, o tipo de linguagem reconhecida.

– <u>Definição Formal</u>: é uma 5-upla $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$

- Σ: alfabeto, símbolos de entrada
- Q : conjunto finito de estados possíveis
- δ : função programa $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$
- q_0 : estado inicial
- F: conjunto finito de estados finais

Autômato Finito Não-Determinístico

– Exemplo:

- L_5: {w | w possui aa ou bb como subpalavra}
- M_5: $(\{a,b\}, \{q_o, q_1, q_2, q_f\}, \delta_5, q_0, \{q_f\})$

δ_5	**a**	**b**
q_o	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
q_1	$\{q_f\}$	-
q_2	-	$\{q_f\}$
q_f	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$

Autômato Finito Não-Determinístico

– Exemplo:

- L_6: {w | w possui aaa como sufixo}
- M_6: $(\{a,b\}, \{q_o, q_1, q_2, q_f\}, \delta_6, q_0, \{q_f\})$

δ_6	**a**	**b**
q_o	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	-
q_2	$\{q_f\}$	-
q_f	-	-

Autômato Finito Não-Determinístico

- Teorema: a classe dos AFD é equivalente à classe dos AFN
- Prova: considerando o AFN apresentando no slide anterior, o AFD correspondente é:

δ_6	**a**	**b**
q_o	q_0q_1	q_o
q_0q_1	$q_0q_1q_2$	q_o
$q_0q_1q_2$	$q_0q_1q_2q_f$	q_o
$q_0q_1q_2q_f$	$q_0q_1q_2q_f$	q_o

Autômato Finito com Movimentos Vazios

– Idéia básica: função programa pode incluir transições sem leitura de símbolo da fita.

– IMPORTANTE: o movimento vazio não aumenta o poder computacional, ou seja, o tipo de linguagem reconhecida.

– Definição Formal: é uma 5-upla $M = (\Sigma, Q\ , \delta\ , q_0, F)$
  - Σ: alfabeto, símbolos de entrada
  - Q : conjunto finito de estados possíveis
  - δ : função programa $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{ \varepsilon \}) \rightarrow 2^Q$
  - q_0 : estado inicial
  - F: conjunto finito de estados finais

Autômato Finito com Movimentos Vazios

– Exemplo:

- L_7: {w | qualquer símbolo a antecede qualquer símbolo b}
- M_7: $(\{a,b\}, \{q_0, q_f\}, \delta_7, q_0, \{q_f\})$

δ_7	a	b	ε
q_0	$\{q_0\}$	-	$\{q_f\}$
q_f	-	$\{q_f\}$	-

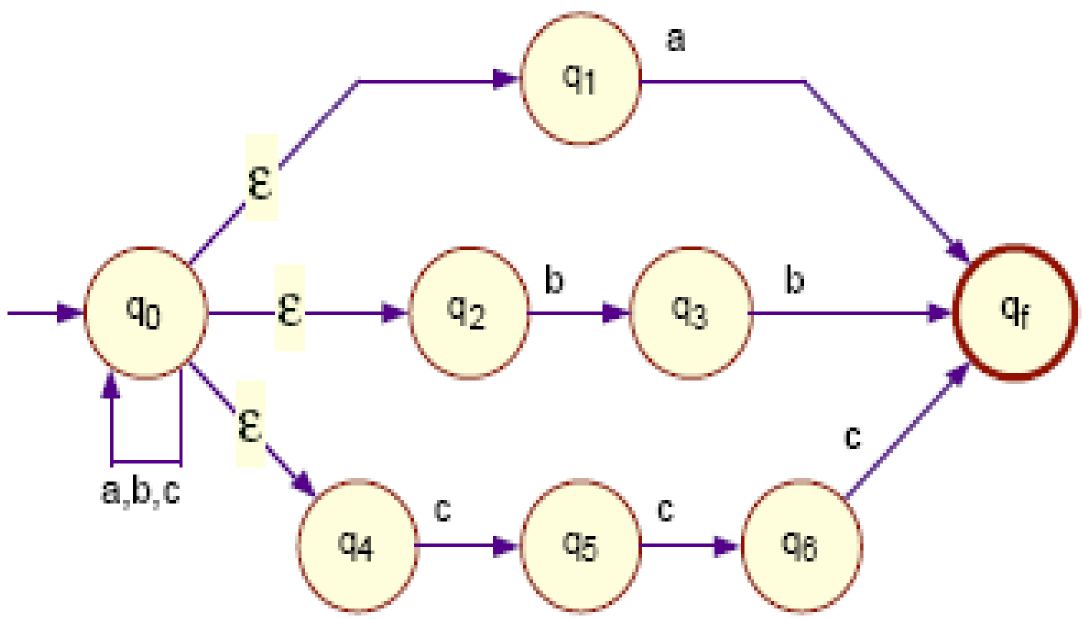
– Definição: Fecho Vazio ou Fecho- ε ou Fε

- $F\varepsilon\ (q_0) = \{q_0, q_f\}$
- $F\varepsilon\ (q_f) = \{q_f\}$
- $F\varepsilon\ (\{q_0, q_f\}) = \{q_0, q_f\}$

Autômato Finito com Movimentos Vazios

– Exemplo:

- L_8: {w | w possui como sufixo a ou bb ou ccc}
- M_8: $(\{a,b,c\}, \{q_o, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_f\}, \delta_8, q_0, \{q_f\})$



Autômato Finito com Movimentos Vazios

- Teorema: a classe dos Afε é equivalente à classe dos AFN.
  - L_9: {w | w possui como sufixo a ou bb ou ccc}
  - M_9: $(\{a,b\}, \{q_o, q_1, q_2\}, \delta_9, q_0, \{q_f\})$

δ_9	**a**	**b**	ε
q_o	$\{q_0\}$	-	$\{q_1\}$
q_1	-	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	-	-

Autômato Finito com Movimentos Vazios

- M_9 ‘: ({a,b}, {q_o, q_1, q_2}, δ_9´,q_0, F´)
  - F ´ = {q_o, q_1, q_2}, pois
    - » Fε (q_0) = {q_o, q_1, q_2}
    - » Fε (q1) = {q_1, q_2}
    - » Fε (q_2) = {q_2}

δ_9 ´	**a**	**b**
q_o	{q_0,q_1,q_2}	{q_1,q_2}
q_1	{q_2}	{q_1,q_2}
q_2	{q_2}	-

Expressão Regular

- Formalismo denotacional para descrever uma linguagem regular.
- Definição Formal: um expressão regular (ER) sobre um alfabeto ∑ é indutivamente definida com segue:
  - Ø é ER e denota a linguagem vazia
  - ε é ER e denota a linguagem { ε }
  - X é ER onde x ϵ ∑ e denota a linguagem {x}

Expressão Regular

- Se r e s são ER e denotam as linguagens R e S, então:
  - (r + s) é ER e denota R U S
  - (rs) é ER e denota RS
  - (r*) é ER e denota R*
- Prioridade: concatenação tem precedência sobre a união.

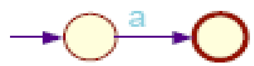
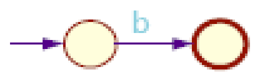
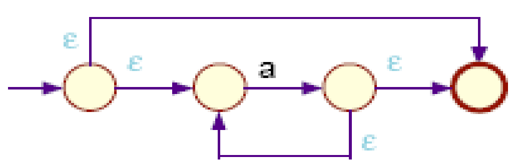
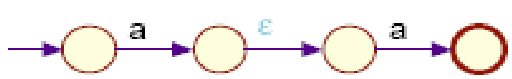
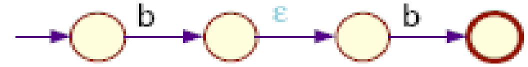
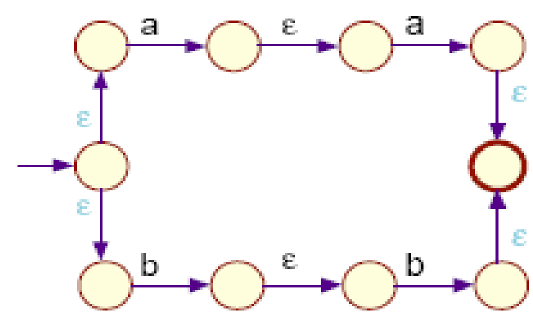
Expressão Regular

– Exemplos:

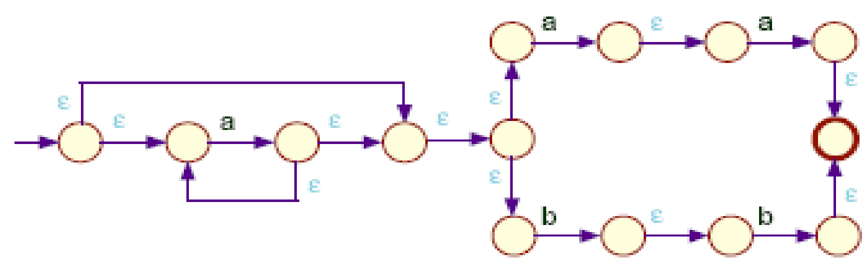
ER	Linguagem Representada
aa	somente a palavra aa
ba*	todas as palavras que iniciam por b, seguido por zero ou mais a
(a + b)*	todas as palavras sobre {a, b}
(a + b)*aa(a + b)*	todas as palavras contendo aa como sub-palavra
a*ba*ba*	todas as palavras contendo exatamente dois b
(a + b)*(aa + bb)	todas as palavras que terminam com aa ou bb
(a + ε)(b + ba)*	todas as palavras que não possuem dois a consecutivos

Expressão Regular

– Exemplo: a*(aa + bb)

ER	Autômato Finito correspondente
a	
b	
a*	
aa	
bb	
(aa + bb)	

• autômato correspondente a a*(aa + bb)



Gramática Regular

- Exemplo: a(ba)*
  - **GLD**. $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ onde P é tq
    - $S \to aA$
    - $A \to baA \mid \varepsilon$
  - **GLE**. $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ onde P é tq
    - $S \to Sba \mid a$
  - **GLUD**. $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ onde P é tq
    - $S \to aA$
    - $A \to bB \mid \varepsilon$
    - $B \to aA$
  - **GLUE**. $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ onde P é tq
    - $S \to Aa \mid a$
    - $A \to Sb$

Gramática Regular

- Exemplo: $(a + b)^*(aa + bb)$
  - **GLD**. $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ onde P é tq
    - $S \rightarrow aS \mid bS \mid A$
    - $A \rightarrow aa \mid bb$
  - **GLE**. $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ onde P é tq
    - $S \rightarrow Aaa \mid Abb$
    - $A \rightarrow Aa \mid Ab \mid \varepsilon$