9ª MOSTRA ACADÊMICA UNIMEP
08 a 10/11 de 2011
Tema: "Ambiente e Sustentabilidade"

9º Simposio de Ensino de Graduação

O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: GRÁFICO DE FUNÇÕES - O EXEMPLO DA FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Autor(es)

LUIS RICARDO ALVES SOARES

Co-Autor(es)

RENATA ROQUE

Orientador(es)

ROSILDA DOS SANTOS MORAES

1. Introdução

O contexto atual da educação brasileira exige um repensar de paradigmas daqueles que a promovem. A sociedade capitalista-industrial de nossos dias, conhecida por sociedade do conhecimento, exige cada vez mais pessoas versáteis que saibam relacionar o conhecimento e aplicá-lo em situações práticas. Para tanto, ser inovador é fundamental de modo que, despertar o individuo para a criatividade deve ser a meta principal de quem promove a educação.

A matemática tem por excelência condições de estimular a criatividade do aprendiz. Em seu artigo, "Formação de Professores de Matemática para o Século XXI: o Grande desafio", Beatriz S. D'Ambrosio cita que os atuais currículos escolares marginalizam essa meta transformando a matemática em algo imutável e desestimulante:

> "De acordo com Thompson (1992; 127), muitos indivíduos consideram a matemática uma disciplina com resultados precisos e procedimentos infalíveis, cujos elementos fundamentais são as operações aritméticas, procedimentos algébricos e definições e teoremas geométricos. Dessa forma o conteúdo é fixo e seu estado pronto e acabado. É uma disciplina fria, sem espaço para a criatividade" (D'AMBROSIO, 1993, p. 35)

A busca por novas metodologias de ensino que estimulem a criatividade do aprendiz, a partir da investigação dos fenômenos, aguçando a sua curiosidade e despertando-o para a produção do conhecimento significativo tem sido objeto de estudo de vários especialistas ao redor do mundo e tem se mostrado como uma boa alternativa para o modelo tradicional de ensino. Uma delas é a Resolução de Problemas. De acordo com Lourdes de La Rosa Onuchic, em seu texto "Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas", este método de ensino procura colocar o aluno como construtor do seu conhecimento libertando-o da passividade tradicional de quem, de forma entediada, recebia informações prontas, desestimulantes e imutáveis. Segundo Onuchic

> "A caracterização da Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um

conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividades.” (ONUCHIC, 1999, p. 203).

Considerando que o modelo tradicional de ensino encontra-se obsoleto e que nossos dias exigem pessoas cada vez mais preparadas para enfrentar situações cada vez mais complexas, refletir sobre uma formação docente que aponte para práticas de estímulo à criatividade se faz necessário.

2. Objetivos

Estudar o maior número de conceitos matemáticos com a resolução do problema: “É dada uma folha de cartolina como na figura ao lado. Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determine esse retângulo, sabendo que a área é máxima”. (IEZZI, MURAKAMI, 2008, p. 150).

(VER FIGURA 1 – ANEXO 1)

3. Desenvolvimento

A metodologia utilizada foi “O Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas”. O método se deu em três frentes: a escolha do problema; o estudo do problema; a aplicação do problema. Para a escolha do problema encontros semanais foram realizados pelos alunos visando levantar problemas que oferecessem um repertório apreciável de conceitos matemáticos. Após a escolha do problema um estudo foi desenvolvido para delimitar os conceitos matemáticos que este abarcava, de modo que tal problema pudesse ser utilizado como um objeto de aprendizagem matemático bem definido. Por fim, deu-se a aplicação do problema para o 4º Semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Metodista de Piracicaba (Campus Centro) em dois momentos: durante uma aula de estágio supervisionado onde se focou a construção de gráficos de funções, a partir do exemplo da construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau, por meio da construção de tabela de valores com pares ordenados e do software Graph; durante uma aula de Resolução de Problemas IV onde se focou as relações algébricas e geométricas necessárias para a resolução do problema. Após a resolução do problema os tópicos matemáticos nele contido foram explanados de modo a evidenciar que este problema é um gerador de conceitos matemáticos relevante.

4. Resultado e Discussão

O problema proposto consistia em encontrar as dimensões de um retângulo, inscrito num triângulo retângulo onde os catetos mediam 6cm e 8cm, cuja área fosse máxima. Para tanto, na aula de estágio supervisionado, foi utilizado um método experimental onde cada aluno foi convidado a traçar no triângulo fornecido retângulos que eles imaginassem ter área máxima, a medir com régua suas dimensões e a calcular sua área. Deveriam ainda registrar a medida da base e da área obtida para cada retângulo traçado na tabela fornecida.

(VER TABELA 1 – ANEXO 1)

Relacionamos os registros realizados com pares ordenados que possam ser colocados no plano cartesiano. Convidamos, então, os alunos a colocarem tais pares ordenados no plano cartesiano e a observar que tipo de figura esses pares ordenados poderiam formar. Todos concordaram que a figura seria algo parecido com uma parábola, figura geométrica que representa o gráfico de uma função polinomial do 2º grau, cujas particularidades (concavidade, zeros e vértice) passamos a estudar. Na seqüência valemo-nos do

uso do software Gaph (nova tecnologia aplicada em sala de aula) para obter uma função que ajustasse melhor os pares ordenados que cada aluno registrou. Encontrada a função cada aluno pode, portanto, calcular a base máxima e a área máxima do retângulo procurado, o que permitiu encontrar sua altura máxima.
Na aula de Resolução de Problemas algumas possibilidades de resoluções foram levantadas e com elas conceitos matemáticos importantes foram acionados. Duas dessas possibilidades envolviam construções por dobradura.

As Dobraduras

Uma primeira aluna construiu o triângulo ABC com as medidas propostas pelo problema e o recortou. Percebeu que ao sobrepor o vértice A e o vértice C do triângulo ABC ao vértice B acabava construindo um retângulo que se inscrevia perfeitamente no triângulo.

(VER FIGURA 2 – ANEXO 1)

Tal retângulo, argumentou a aluna, é obtido através da composição de dois triângulos retângulos idênticos, não havendo outra possibilidade de compor um retângulo, a partir de dois triângulos, que seja inscrito no triângulo retângulo ABC. Sabendo que a soma das áreas de dois triângulos corresponde a área de um retângulo a aluna demonstrou que o retângulo obtido é o retângulo de área máxima procurado. A aluna constatou ainda, utilizando régua, que os vértices F e E do retângulo BEDF eram pontos médios dos catetos AB e BC, respectivamente, do triângulo retângulo ABC. Desse modo as dimensões do retângulo de área máxima procurado seriam:

(VER EXPRESSÃO 1 – ANEXO 2)

A aluna prolongou sua análise acerca do problema questionando-se se o segmento de reta BD poderia ser mediana relativa ao lado AB do triângulo e bissetriz do ângulo B. Para tanto a aluna percebeu as seguintes congruências nos triângulos retângulos AFD e DEC:

(VER FIGURA 3 E EXPRESSÃO 2 – ANEXO 2)

Resulta de (1), (2) e (3) e do Postulado LAL para congruência de triângulos que os triângulos retângulos AFD e DEC são congruentes. Portanto as hipotenusas AD e DC possuem a mesma medida o que torna o ponto D ponto médio do lado AC do triângulo retângulo ABC. Concluí-se então que o segmento BD é mediana relativa ao lado AC do triângulo ABC.
Para verificar se BD poderia ser bissetriz do ângulo B foi feita a seguinte análise: Sejam os triângulos ADB e BDC.

(VER FIGURA 4 – ANEXO 2)

Da congruência de triângulos vista anteriormente temos que os lados AD, BD e CD são congruentes. Sendo assim, os triângulos ADC e BDC são isósceles o que implica em BA?D?AB?D bem como DC?B?DB?C. Contudo, os lados AB e BC são diferentes o que torna também diferentes os ângulos AB?D e DB?C. Dessa forma o segmento de reta BD não é bissetriz do ângulo B.
Uma segunda aluna estendeu o triângulo ABC para um retângulo de medidas 6cm e 8cm. Ao dobrar tal retângulo ao meio verticalmente e horizontalmente o retângulo ficou dividido em 4 retângulos menores. Um desses retângulos ficou perfeitamente inscrito dentro do triângulo ABC conforme a figura abaixo:

(VER FIGURA 5 – ANEXO 3)

Dessa forma a aluna argumentou que a área máxima do retângulo procurado seria igual a um quarto da área do retângulo ABCG:

(VER EXPRESSÃO 3 – ANEXO 3)

Visto que as dobraduras foram feitas em cima dos pontos médios dos lados do retângulo ABCG é imediato que as medidas dos lados do retângulo de área máxima inscrito no triângulo ABC é a metade das medidas dos lados do retângulo ABCG. Dessa forma, as dimensões do retângulo de área máxima procurado são 3cm e 4cm, visto que 3.4 = 12cm^2. Neste instante, uma terceira aluna questionou o fato de haver um único triângulo de área máxima igual a 12cm^2 inscrito no triângulo ABC. Para tanto, a aluna argumentou que se a base do retângulo está sobre o lado BC do triângulo ABC esta base – que denotaremos por b – está contida no intervalo de 0 à 8cm. Do mesmo modo, se a altura do retângulo está sobre o lado AB do triângulo ABC esta altura – que denotaremos por h – está contida no intervalo de 0 à 6cm. Como a área máxima, segundo o método das dobraduras, corresponde a 12 cm^2 e, definido os intervalos onde b e h podem variar, existem outras combinações de valores para b e h que nos permitem obter a tal área. Para resolver essa questão lançamos mão de um método algébrico que nos permitisse encontrar de uma forma segura as dimensões deste retângulo de área máxima.

O Método Algébrico

Neste instante foi utilizado um método algébrico que consistia na obtenção da função que relacionava a área do retângulo com sua base a partir da semelhança de triângulos que os triângulos ABC e AED mantêm (Critério: AAA)

(VER FIGURA 6 – ANEXO 3)

Assim, A(x) é uma função polinomial do 2º grau, cujo gráfico apresenta um único ponto de máximo que sabemos calcular e que nos permitirá encontrar um único retângulo de dimensões máximas. Para tanto, seja xv a abscissa do vértice da parábola A(x), que neste caso coincide com a base máxima do retângulo procurado: x = 4cm e y = 3 cm. Isto que nos permite concluir que existe um único retângulo de área máxima igual a 12cm2 que pode ser inscrito no triângulo retângulo ABC dado. A explicação para a constatação da terceira aluna falhar consiste no fato de que outros retângulos com área igual a $12cm^2$ não serem perfeitamente inscritíveis no triângulo ABC.

A Derivada

Sabemos que as funções polinomiais são diferenciáveis em todo o seu domínio. A derivada de uma função é interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente à curva num dado ponto (THOMAS, 2006, p. 141-150). Assim, pontos de máximos e mínimos de funções polinomiais são facilmente identificáveis quando derivamos tal função e igualamos essa derivada à zero, visto que em tais pontos a reta não apresenta inclinação (THOMAS, 2006, p. 229-238). Dessa forma, encontrada a função A(x) podemos também encontrar a base máxima derivando tal função e igualando a sua derivada a zero. Em seguida, podemos encontrar a altura de tal retângulo substituindo o valor da base encontrada na função original.

5. Considerações Finais

Concluí-se que o ensino-aprendizagem de matemática através de resolução de problemas é um método de extrema valia para o ensino de matemática. Tal método permite, através de uma postura investigativa, a construção de conceitos de forma dinâmica e criativa, levando àqueles que se dedicam a construírem conhecimento significativo.

Referências Bibliográficas

D'AMBROSIO, Beatriz S.; **A formação de professores de Matemática para o século XXI**: O grande desafio. Disponível em http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/~proposocoes/textos/10-artigos-d%5C'ambrosiobs.pdf. . Acessado em 23/08/2010 às 21:00h.

IEZZI, G., MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar:** conjuntos e funções. Atual editora. São Paulo. 2008. p 150.

ONUCHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

THOMAS, G. B., et all. **Cálculo.** Pearson Education do Brasil. 4ª ed., v.1. São Paulo. 2006. p. 141-150; 229-238

Anexos

Figura 1: Folha de cartolina na forma de triângulo retângulo (Fonte: Geogebra)

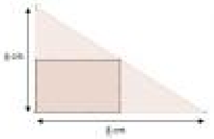


Figura 2: Construção do retângulo de área máxima por dobradura I (Fonte: Geogebra)

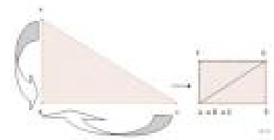


Tabela 1: Registro das bases medidas com régua e das áreas dos retângulos construídos (Fonte: Microsoft Word 2007)

[illegible]	[illegible]	[illegible]
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Expressão 1:

$$\begin{cases} BF = \frac{1}{2}.AB \rightarrow BF = \frac{1}{2}.6 \therefore BF = 3cm \\ BE = \frac{1}{2}.BC \rightarrow BE = \frac{1}{2}.8 \therefore BE = 4cm \end{cases}$$

Figura 4: Segmento BD – possível bissetriz do triângulo ABC (Fonte: Geogebra)

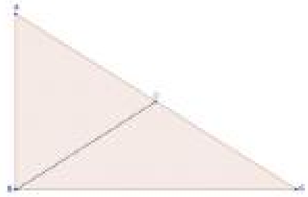
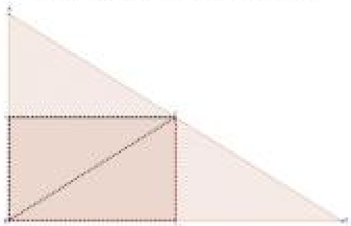


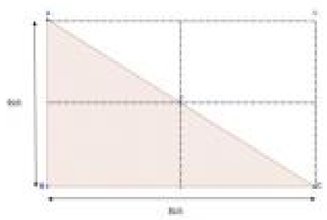
Figura 3: Congruência dos triângulos AFD e DEC (Fonte: Geogebra)



Expressão 2

$$\begin{cases} AF \cong DE \ldots (1) \\ \hat{F} \cong \hat{E} \ldots (2) \\ FD \cong EC \ldots (3) \end{cases}$$

Figura 5: Construção do retângulo de área máxima por dobradura II (Fonte: Geogebra)



Expressão 3

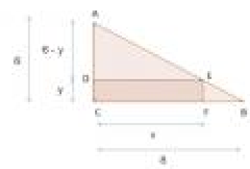
$$S_{ret} = \frac{1}{4}.S_{ABCD}$$

$$S_{máx} = \frac{1}{4}.6.8$$

$$S_{máx} = 12\ cm^2$$

Figura 6: Semelhança de triângulos ABC e AED – Critério: AAA (Fonte: Geogebra)

Construção da função de área máxima.



Assim, observando que:

$$\begin{cases} A = x.y \quad \ldots (1) \\ \frac{6}{8} = \frac{6-y}{x} \quad \ldots (2) \end{cases}$$

De (2) temos:

$$\frac{6}{8} = \frac{6-y}{x} \rightarrow y = -\frac{6}{8}x + 6 \quad \ldots (3)$$

Finalmente substituindo (3) em (1) temos que:

$$A(x) = x\left(-\frac{6}{8}x + 6\right) \therefore A(x) = -\frac{6}{8}x^2 + 6x$$