16° Congresso de Iniciação Científica

TEORIA DOS INVARIANTES: CÚBICA BINÁRIA

Autor(es)

KELLY CRISTINA TRINCA MARCHESI

Orientador(es)

ADRIANA CÉSAR DE MATTOS

Apoio Financeiro

FAPIC/UNIMEP

1. Introdução

O projeto que deu origem a esta iniciação cientifica é “A análise do processo de reconhecimento histórico na História da Matemática” de autoria de Mattos (FAP, 2004). O projeto maior busca responder sobre a emergência de Arthur Cayley na História da Matemática abordando dois aspectos em especial, as estruturas de reconhecimento e a epistemologia.

A relevância do presente trabalho se justifica por ser conseqüência de pesquisa que se inicia com a proposta do estudo histórico e sociológico sobre o trabalho do matemático Arthur Cayley. Encontramos pesquisadores tais como Tony Crilly na História da Matemática, na sociologia do conhecimento Allan Fischer e na Educação Matemática Steven Lerman. Naturalmente os diversos trabalhos se conectam um com os outros, contudo alguns deles possuem caráter matemático (epistemológico) outros caráter sociológico (estruturas de reconhecimento).

A história da matemática “comum” costuma divulgar (Boyer, 1974) que o século XIX merece ser reconhecido como a Idade Áurea da Matemática. Talvez mereça! A base dessa justificativa é, pois que durante os anos de 1901 d.C a 2000 d.C esta ciência superou tanto em quantidade e qualidade a produtividade total de descobertas matemáticas de todas as épocas precedentes. Naturalmente este resultado assume como conseqüência “concluir” que essas inúmeras teorias desenvolvidas neste século foram heranças de seus antecessores, já que essas teorias anteriores a este século foram reformuladas e aprimoradas de acordo com a necessidade e as novas informações da época. Este resultado justifica a relevância do estudo da álgebra inglesa do século XIX, contudo não é apenas isso que esperamos com o trabalho maior e sim responder por que razão os ingleses, alemães ou franceses adquiriram reconhecimento histórico no período em estudo, por exemplo, os portugueses e espanhóis (apesar de europeus) estão à parte.

As graduações em Matemática de qualquer parte do mundo estão baseadas na álgebra inglesa, a maior conseqüência prática desse assunto veio por parte de George Boole (1815-1864) com a álgebra booleana, a base de linguagem dos computadores.

Segundo Boyer (1974) em 1829 um novo mundo na Geometria foi descoberto pelo russo Lobachevsky e em 1874 o campo da Análise fora assombrado pela matemática do infinito introduzida por Cantor e na álgebra, precisamente nos anos de 1843 e 1847, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) e George Boole (1815-1864) deram grandes passos.

Os contribuidores ingleses mais assíduos em relação à álgebra do século XIX foram Arthur Cayley (1821-1895) e J. J. Sylvester (1814-1897) - e foi principalmente na universidade de onde esses matemáticos provinham, Cambridge, que se deu o aparecimento da Álgebra Moderna.

2. Objetivos

Esta pesquisa tem como objetivo definir e calcular os invariantes da forma cúbica binária. Destaca-se também:

Definir o que é um Quântico; Operar os elementos de um quântico através de transformações lineares;
Mostrar um invariante da cúbica binária.

3. Desenvolvimento

A partir do início das atividades para a elaboração do projeto, a orientadora se prontificou em realizar a formação de um grupo de estudos sobre “A História da Álgebra no século XIX”. O grupo é constituído pela orientadora, seus dois bolsistas e alunos do Curso de Licenciatura de Matemática e Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Metodista de Piracicaba que manifestaram interesse. Os encontros no segundo semestre de 2007 ocorreram durante as sextas-feiras até meados do mês de Dezembro, e de Janeiro à Julho passaram a ser nas quintas-feiras. Através destas reuniões em grupo, estudamos artigos de Arthur Cayley e os livros do Elliot (1895) e Boyer (1974).

Contudo, a principal fonte de material para a composição deste projeto foi concebida graças a diversos estudos no livro do Elliot (1895).

Além dos encontros do grupo em que recebíamos as orientações da professora Adriana Cesar Mattos, a bolsista Gisele Zanuzi Hebfner e eu estudávamos em outros horários, pois os nossos projetos utilizavam a mesma bibliografia. Traduzíamos os textos da bibliografia, que se encontravam em inglês, além de calcular os invariantes propostos pela orientadora, utilizando na maioria das vezes o software Maple.

4. Resultado e Discussão

O trabalho propõe estudar os invariantes da cúbica binária tomando como base a teoria dos invariantes.

Apresentamos as principais definições relativas a um quântico binário (a0, a1, a2, a3, ... , ap)$(x, y)^p$, particularmente em relação às cúbicas binárias, que é definida da seguinte forma: $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ ou (a0, a1, a2, a3)$(x, y)^3$, devido apresentar duas variáveis e ordem 3.

Façamos agora algumas considerações importantes em relação às quânticas binárias. As p-icas binárias da seguinte forma:

$a0x^p + pa1x^{p-1}y + [(p(p-1)/1.2)a2x^{p-2}y^2] + [((p(p-1)(p-2))/1.2.3)a3x^{p-3}y^3 + ... + pap\text{-}1xy^{p-1} + apy^p$,

e simbolicamente abreviada por:

$$(a0, a1, a2, a3,..., ap)\ (x, y)^{\ p}$$

As vantagens de se utilizar a primeira forma ocorre devido aos coeficientes 1, p, p(p-1)/1*2, ..., formarem uma ordem binomial e serem introduzidos na forma de fator dos coeficientes nas p-icas binárias, tornando assim aparentes na seqüência.

A forma simbólica também possui suas vantagens quando os quânticos de maiores ordens são trabalhados, evitando operar com coeficientes multinomiais. Logo, na fórmula geral da q-ária e p-ica estarão reduzidos nas variáveis x1, x2,..., xq, sendo conveniente considerar cada coeficiente como produto de um fator denotado por uma letra, resultando qualquer valor que possa ser atribuído, e o coeficiente de termo correspondente na expansão $(x1 + x2 + ... + xq)^p$.

Os coeficientes de uma quântica binária (ao, a1, a2,..., ap) $(x, y)^p$ são os termos ao, a1, a2,..., ap. Enquanto a0, pa1, (p(p-1)/1*2)a2,..., ap, são os coeficientes da forma binomial. Esta propriedade vale da mesma forma para quânticos com números de variáveis maiores que duas.

O invariante de um quântico é uma função dos coeficientes do quântico, que precisa ser multiplicado por um fator que é função dos coeficientes, em um esquema de substituição linear e deve produzir a mesma função dos coeficientes correspondentes no quântico original.

A binária p-ica (a0, a1, a2, ..., ap)$(x,y)^p$ é transformada pela substituição linear,

$x = lX + mY$
$y = l'X + m'Y$

e torna-se (A0, A1, A2, ..., Ap)$(X,Y)^p$, onde A0, A1, A2, ..., Ap são funções de a0, a1, a2, ..., ap e l,m,l´,m´. Então f(a0, a1, a2, ..., ap) será invariante se manter a forma:

f(A0, A1, A2, ..., Ap) = φ(l, m, l´, m´) f (a0, a1, a2, ..., ap)

Um invariante de uma cúbica binária encontrado por Cayley é $a^2d^2 - 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d$ (CRILLY, 1986). A demonstração deste fato foi realizada por nós durante a Iniciação Científica.

Considerando o invariante:

$A^2D^2 – 3B^2C^2 – 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3D$

E os valores de A, B, C e D já calculados anteriormente, com:

$A = al^3 + 3bl^2l' + 3cl'^2l + dl'^3$;

$B = al^2m + bl^2m' + 2bll'm + 2cll'm' + cl'^2m + dl'^2m'$;

$C = alm^2 + bm^2l' + 2blmm' + 2cl'mm' + cm'^2l + dl'm'^2$;

$D = am^3 + 3bm^2m' + 3cm'^2m + dm'^3$;

Substituindo os valores de A, B, C e D no invariante, temos:

$$A^2D^2 – 3B^2C^2 – 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3D = (al^3 + 3bl^2l' + 3cl'^2l + dl'^3)^2*(am^3 + 3bm^2m' + 3cm'^2m + dm'^3)^2 – 3*(al^2m + bl^2m' + 2bll'm + 2cll'm' + cl'^2m + dl'^2m')^2*(alm^2 + bm^2l' + 2blmm' + 2cl'mm' + cm'^2l + dl'm'^2)^2 – 6*(al^3 + 3bl^2l' + 3cl'^2l + dl'^3)*(al^2m + bl^2m' + 2bll'm + 2cll'm' + cl'^2m + dl'^2m')*(alm^2 + bm^2l' + 2blmm' + 2cl'mm' + cm'^2l + dl'm'^2)*(am^3 + 3bm^2m' + 3cm'^2m + dm'^3) + 4*(al^3 + 3bl^2l' + 3cl'^2l + dl'^3)*(alm^2 + bm^2l' + 2blmm' + 2cl'mm' + cm'^2l + dl'm'^2)^3 + 4*(al^2m + bl^2m' + 2bll'm + 2cll'm' + cl'^2m + dl'^2m')^3*(am^3 + 3bm^2m' + 3cm'^2m + dm'^3)$$

Distribuindo as potências e multiplicando:

$$A^2D^2 – 3B^2C^2 – 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3D = a^2d^2l'^6m^6 – 3b^2c^2l^6m'^6 – 3b^2c^2l'^6m^6 + 4ac^3l^6m'^6 + 4b^3dl'^6m^6 + 4ac^3l'^6m^6 + 60ac^3l^4l'^2m^2m'^4 + 120abcdl^3l'^3m^3m'^3 – 45b^2c^2l^4l'^2m^2m'^4 + 60b^2c^2l^3l'^3m^3m'^3 – 90abcdl^2l'^4m^4m'^2 + 60b^3dl^2l'^4m^4m'^2 + 60ac^3l^2l'^4m^4m'^2 – 45b^2c^2l^2l'^4m^4m'^2 + 36abcdll'^5m^5m' + 15a^2d^2l^4l'^2m^2m'^4 – 24b^3dl^5l'mm'^5 + 60b^3dl^4l'^2m^2m'^4 + 18b^2c^2l^5l'mm'^5 – 24ac^3ll'^5m^5m' + 18b^2c^2ll'^5m^5m' + 15a^2d^2l^2l'^4m^4m'^2 – 80b^3dl^3l'^3m^3m'^3 – 80ac^3l^3l'^3m^3m'^3 – 90abcdl^4l'^2m^2m'^4 + 36abcdl^5l'mm'^5 – 24ac^3l^5l'mm'^5 – 20a^2d^2l^3l'^3m^3m'^3 – 24b^3dll'^5m^5m' – 6abcdl'^6m^6 – 6a^2d^2ll'^5m^5m' + a^2d^2l^6m'^6 + 4b^3dl^6m'^6 – 6a^2d^2l^5l'mm'^5 – 6abcdl^6m'^6$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$A^2D^2 – 3B^2C^2 – 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3D = l^6m'^6(a^2d^2 – 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d) + l'^6m^6(a^2d^2 – 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d) + 15l^4l'^2m^2m'^4(a^2d^2 – 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d) – 20l^3l'^3m^3m'^3(a^2d^2 – 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d) + 15l^2l'^4m^4m'^2(a^2d^2 – 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d) – 6l^5l'mm'^5(a^2d^2 – 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d) – 6ll'^5m^5m'(a^2d^2 – 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d) = (a^2d^2 – 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d)*(l^6m'^6 + l'^6m^6 + 15l^4l'^2m^2m'^4 – 20l^3l'^3m^3m'^3 + 15l^2l'^4m^4m'^2 – 6l^5l'mm'^5 – 6ll'^5m^5m')$$

Então:

$$A^2D^2 – 3B^2C^2 – 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3D = (a^2d^2 – 3b^2c^2 – 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d)*(lm' – l'm)^6$$

Portanto, é um invariante, mantendo a forma:

f(A0, A1, A2, ..., Ap) = φ(l, m, l´, m´) f (a0, a1, a2, ..., ap)

Assim, em todos os casos o fator depende somente dos coeficientes no esquema de substituição da identidade com o qual expressa o fato da invariância que é na verdade a potência do módulo M. Para qualquer invariante de uma binária quântica, φ(l, m, l´, m´) é a potência de lm´- l´m.

5. Considerações Finais

Realizamos o estudo da Teoria dos Invariantes e fizemos a operação de transformar um quântico nas variáveis x,y em um nas variáveis X,Y e nos coeficientes *a,b,c* e *d* e *A,B,C,* e *D* respectivamente via uma transformação linear. Encontramos um invariante da cúbica binária $a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d$ (CRILLY, 1986) e demonstramos que esta *forma* é invariante.

Referências Bibliográficas

BALL, W.W. R. **A short Account of the History of Mathematics**. Second edition. London: Macmillian an CO., Limited: 1893.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** Edgard Blücher. São Paulo. 1974.

CAJORI, F. **A History of Mathematics.** Macmillan & Co.: New York & London, 1938.

CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2004.

_______The Rise of cayley's Invariant Theory (1841-1862). **Historia Mathematica.** V.13, 1986, p. 241-254.

_______The young Arthur Cayley. **Notes and Records of the Royal Society.** London, v.52 (2), 1998, pp.267-282.

CAYLEY, A. An Introductory memoir on quantics. **Philosophical Transaction of Royal Society of London.** London, 1854b, 144, pp. 244-258.

Elliot, E. B. **An Introduction to the Algebra of Quantics**, Oxford: At the Claredon Press, 1895.

MATTOS,A.C. The process of recognition in the History of Mathematics**. Report.** London South Bank University, 2006.